

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЕМ ФИНАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

© В.Л. КАМЫНИН

Москва, Россия

§1. Введение.

В работе изучается вопрос об условиях однозначной разрешимости обратной задачи нахождения пары функций $\{u(t, x), f(x)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$\rho(t, x)u_t - \Delta u = f(x)g(t, x) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q \equiv [0, T] \times \Omega, \quad (1.1)$$

начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

граничному условию

$$u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

и условию переопределения

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Ранее обратные задачи определения правой части параболического уравнения с условием финального переопределения изучались рядом авторов (см. [1–5] и др.). В [1, 2] изучался вопрос существования гладких решений соответствующей обратной задачи для параболических уравнений с гладкими, не зависящими от t коэффициентами. Отдельно был рассмотрен случай $n = 1$, где допускалась зависимость коэффициентов от t . В [3] рассматривалась обратная задача для уравнений, главная часть которого является оператором теплопроводности, но решения принадлежат классам Соболева. В [4] изучались обобщенные решения обратной задачи для параболического уравнения с коэффициентами, не зависящими от t .

В указанных работах были доказаны теоремы об однозначной разрешимости соответствующих обратных задач либо при условии определенной малости входящих в условие задачи данных (так называемая *локальная разрешимость*), либо при дополнительном условии, которое для уравнения (1.1) формулируется в виде

$$g(t, x) \geq 0, \quad g_t(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in Q. \quad (1.5)$$

Известные примеры показывают, что те или иные дополнительные условия на входящие в задачу данные необходимы. Без указанных условий в [2, 4] для уравнений с гладкими коэффициентами (в [2] допускалась зависимость коэффициентов также и от t) были доказаны теоремы о том, что из единственности решения соответствующей обратной задачи следует существование решения такой задачи (так называемая *фредгольмова разрешимость* обратной задачи).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 00 01 00638).

В настоящей работе исследование однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4) проводится при существенно более слабых по сравнению с работами [1–5] требованиях на гладкость входящих в условие задачи функций. Получено несколько вариантов условий, обеспечивающих локальную разрешимость (в обобщенном смысле) задачи (1.1)–(1.4), а также теорема о фредгольмовой разрешимости рассматриваемой обратной задачи. Показано, что при $g(t, x) = \text{const}$, $\rho(t, x) = \text{const}$ полученные в работе результаты включают в себя известные ранее.

Будем использовать следующие обозначения.

Положим $Q_{t_1}^{t_2} = [t_1, t_2] \times \Omega$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $Q_t^0 \equiv Q_t$, $Q_T^0 \equiv Q$. Пространства $L_2(Q_{t_1}^{t_2})$, $L_2(\Omega)$, $W_2^{1,2}(Q)$, $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$, $C(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega))$, $C(0, T; L_2(\Omega))$, $W_2^2(\Omega)$ с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [6]).

Положим

$$\|v\| \equiv \|v\|_{L_2(\Omega)}, v(x) \in L_2(\Omega);$$

$$\|v_x\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \right)^{1/2}; \quad \|v_{xx}\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Через θ обозначим константу из неравенства Пуанкаре-Стеклова

$$\|v\| \leq \theta \|v_x\|, \quad (1.6)$$

которое справедливо для любой $v(x) \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

Мы будем использовать известное арифметическое неравенство

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad a, b \in \mathbf{R}^1. \quad (1.7)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи, измеримы и удовлетворяют следующим условиям.

$$(A) \quad \Lambda_1 \leq \rho(t, x) \leq \Lambda_2, \quad -K_{\rho,1} \leq \rho_t(t, x) \leq K_{\rho,2}, \quad (t, x) \in \bar{Q};$$

$$(B) \quad |g(t, x)| \leq K_g, \quad |g_t(t, x)| \leq K_g^*, \quad |g(T, x)| \geq g_0 > 0, \quad (t, x) \in \bar{Q};$$

$$(C) \quad h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)), \quad \|h(t, \cdot)\| \leq K_h, \quad h_t(t, x) \in L_2(Q), \quad \|h_t\|_{L_2(Q)} \leq K_h;$$

$$(D) \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \quad \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M_0;$$

$$(E) \quad \varphi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \quad \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq K_{\varphi}.$$

Здесь $\Lambda_1, \Lambda_2, K_g, g_0 = \text{const} > 0$, $K_{\rho,1}, K_{\rho,2}, K_g^*, K_h, M_0, K_{\varphi} = \text{const} \geq 0$.

Положим $K_{\rho} = \max\{K_{\rho,1}, K_{\rho,2}\} \geq 0$.

Ниже через c (возможно, с индексом) будем обозначать любые положительные константы, зависящие от $\Lambda_1, \Lambda_2, K_{\rho}, K_g, g_0, K_g^*, K_h, M_0, K_{\varphi}, \theta$.

Автор благодарит профессора А.И.Прилепко и участников руководимого им семинара за полезное обсуждение результатов работы.

§2. Сведение обратной задачи к операторному уравнению. Фредгольмова разрешимость обратной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4) будем называть пару функций $\{u(t, x), f(x)\}$, $u(t, x) \in C(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega))$, $u_t, u_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega))$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в Q , причем функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.3), (1.4) в $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

Решение исходной обратной задачи будем искать в виде

$$\{u(t, x), f(x)\} = \{z(t, x), f(x)\} + \{v(t, x), 0\}, \quad (2.1)$$

где $v(t, x)$ – решение в Q прямой задачи

$$\rho(t, x)v_t - \Delta v = h(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.2)$$

$$v(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], x \in \partial\Omega, \quad (2.4)$$

а пара $\{z(t, x), f(x)\}$ – решение в Q обратной задачи

$$\rho(t, x)z_t - \Delta z = f(x)g(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.5)$$

$$z(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$z(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], x \in \partial\Omega, \quad (2.7)$$

$$z(T, x) = \varphi(x) - v(T, x) \equiv \psi(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.8)$$

Обратимся к задаче (2.2)–(2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Энергетическим решением задачи (2.2)–(2.4) будем называть функцию $v(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющую соответствующему интегральному тождеству (см., например, [6, с. 158–164].)

В силу [6, с. 189] энергетическое решение задачи (2.2)–(2.4) существует и единственно. Однако, в силу наших предположений это решение обладает дополнительной гладкостью.

Во-первых, в силу [7] $v(t, x) \in W_2^{1,2}(Q)$. Во-вторых, в силу теоремы 4.1, доказанной ниже в §4, функция $y(t, x) \equiv v_t(t, x)$ является энергетическим решением первой краевой задачи, получаемой из задачи (2.2)–(2.4) путем формального дифференцирования ее по t :

$$\rho(t, x)y_t + \rho_t(t, x)y - \Delta y = h_t(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.9)$$

$$y(0, x) = \frac{\Delta u_0 + h(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$y(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], x \in \partial\Omega. \quad (2.11)$$

Из результатов работы [6] следует, что

$$y(t, x) \equiv v_t(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)),$$

причем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v_t(t, \cdot)\| + \|v_{tx}\|_{L_2(Q)} \leq c_1. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.12), нетрудно повторить рассуждения из [8, с. 116–117], в результате которых получается оценка

$$\|v_{xx}(t, \cdot)\| \leq c_2. \quad (2.13)$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$ из соотношения (2.8). Из оценки (2.13) и условия (E) следует, что

$$\psi \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad (2.14)$$

причем

$$\|\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq K_\psi, \quad (2.15)$$

где $K_\psi = \text{const} > 0$ зависит от $n, \Lambda_1, \Lambda_2, K_\rho, K_\varphi, M_0, K_h$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу приведенных рассуждений и оценки (2.15) получаем, что изучение однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4) эквивалентно исследованию однозначной разрешимости обратной задачи (2.5)–(2.8).

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ произвольна. Тогда соотношения (2.5)–(2.7) представляют собой первую краевую задачу для нахождения функции $z(t, x)$. Повторяя рассуждения, проведенные выше для задачи (2.2)–(2.4), получим, что для любой $f(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $z(t, x)$ задачи (2.5)–(2.7), причем

$$z(t, x) \in C(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)), z_t \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)), \\ z_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega)). \quad (2.16)$$

Полагая в (2.5) $t = T$ и учитывая (2.8), приходим к соотношению

$$\rho(T, x)z_t(T, x) - \Delta\psi = f(x)g(T, x), \quad (2.17)$$

откуда

$$f(x) = \frac{\rho(T, x)}{g(T, x)}z_t(T, x) - \frac{\Delta\psi}{g(T, x)}. \quad (2.18)$$

Введем линейный оператор $B : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ по формуле

$$B(f) = \frac{\rho(T, x)}{g(T, x)}z_t(T, x), \quad (2.19)$$

где $z(t, x)$ – решение прямой задачи (2.5)–(2.7) при заданной функции $f(x)$ в правой части уравнения (2.5). В силу (2.19) соотношение (2.18) можно записать в виде операторного уравнения

$$f = B(f) - \frac{\Delta\psi}{g(T, x)}. \quad (2.20)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия (A) – (E). Тогда для того, чтобы пара $\{z, f\}$ была обобщенным решением задачи (2.5)–(2.8) необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (2.5)–(2.7), (2.20).

Доказательство. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (2.20).

Докажем достаточность. Итак, пусть $f^*(x) \in L_2(\Omega)$ является решением уравнения (2.20). Рассмотрим функцию $z^*(t, x)$ как единственное решение прямой задачи (2.5)–(2.7) с выбранной функцией $f(x) \equiv f^*(x)$ в правой части уравнения (2.5). Как и выше, получим, что $z^*(t, x)$ удовлетворяет (2.16). Положим

$$\psi^*(x) = z^*(T, x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}_2^1(\Omega). \quad (2.21)$$

Тогда, очевидно,

$$\rho(T, x)z_t^*(T, x) - \Delta\psi^* = f^*(x)g(T, x). \quad (2.22)$$

С другой стороны, $f^*(x)$ является решением уравнения (2.20) и в силу определения оператора B имеем, что $f^*(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\rho(T, x)z_t^*(T, x) - \Delta\psi = f^*(x)g(t, x).$$

Сравнивая его с (2.22), получаем, что

$$\Delta\psi^*(x) = \Delta\psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Из последнего соотношения с учетом (2.14) и (2.21) вытекает, что $\psi^*(x) = \psi(x)$ в Ω , а следовательно, пара $\{z^*(t, x), f^*(x)\}$ является решением обратной задачи (2.5)–(2.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия (A) – (E). Тогда оператор B , введенный соотношением (2.19), является вполне непрерывным как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$. Пусть $z(t, x)$ – решение прямой задачи (2.5)–(2.7). Положим $w(t, x) = z_t(t, x)$. Тогда в силу (2.16)

$$w(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)), \quad (2.23)$$

причем из доказанной ниже теоремы 4.1 вытекает, что $w(t, x)$ является в Q энергетическим решением первой краевой задачи

$$(\rho w)_t - \Delta w = f(x)g_t(t, x), \quad (2.24)$$

$$w(0, x) = \frac{f(x)g(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega, \quad (2.25)$$

$$w(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.26)$$

которая получается из задачи (2.5)–(2.7) путем формального дифференцирования по t .

Из (2.23) следует, что для почти всех $t \in (0, T]$ $w_x(t, x) \in L_2(\Omega)$. Выберем и зафиксируем $\varepsilon \in (0, T)$ так, чтобы $w_x(\varepsilon, \cdot) \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим в Q_T^ε первую краевую задачу

$$(\rho y)_t - \Delta y = f(x)g_t(t, x), \quad (2.27)$$

$$y(\varepsilon, x) = w(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega, \quad (2.28)$$

$$y(t, x) = 0, \quad t \in [\varepsilon, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.29)$$

в силу [6, с.202–206] такая задача имеет единственное энергетическое решение $y(t, x)$, причем, пользуясь методами работ [6, с.212] и [9], нетрудно показать, что

$$y(t, x) \in C(\varepsilon, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q_T^\varepsilon). \quad (2.30)$$

Очевидно, что $w(t, x)$ также является энергетическим решением задачи (2.27)–(2.29) (см. соотношение (2.23)). Следовательно, $w(t, x) = y(t, x)$ в Q_T^ε и из (2.30) вытекает тогда, что

$$w_x(t, x) \in C(\varepsilon, T; L_2(\Omega)). \quad (2.31)$$

Из теоремы о среднем в силу (2.31) вытекает существование $\tau^* \in [\varepsilon, T]$ такого, что

$$\int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} |w_x(t, x)|^2 dx dt = (T - \varepsilon) \|w_x(\tau^*, \cdot)\|^2. \quad (2.32)$$

Перепишем уравнение (2.24) в виде

$$-w_t + \frac{1}{\rho(t, x)} \Delta w = \frac{\rho_t(t, x)}{\rho(t, x)} w - \frac{g_t(t, x)}{\rho(t, x)} f,$$

умножим его на Δw и проинтегрируем по цилиндру Q_T^* . После несложных преобразований с применением неравенства (1.7), получим соотношение

$$\frac{1}{2} \|w_x(T, \cdot)\|^2 + \frac{1}{2\Lambda_2} \|\Delta w\|_{L_2(Q_T^*)}^2 \leq c_1 T \|f\|^2 + c_2 \|w\|_{L_2(Q_T^*)}^2 + \frac{1}{2} \|w_x(\tau^*, \cdot)\|^2,$$

из которого после использования (2.32) приходим к оценке

$$\frac{1}{2} \|w_x(T, \cdot)\|^2 \leq c_1 T \|f\|^2 + c_2 \|w\|_{L_2(Q_T^*)}^2 + \frac{1}{2(T - \varepsilon)} \|w_x\|_{L_2(Q_T^*)}^2. \quad (2.33)$$

Умножим теперь уравнение (2.24) на $w(t, x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q_t . Тогда с учетом (2.26) после интегрирования по частям придем к неравенству

$$\frac{\Lambda_1}{2} \|w(t, \cdot)\|^2 + \|w_x\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq c_3 \|f\|^2 + K_\rho \|w\|_{L_2(Q_t)}^2 + K_g^* \sqrt{t} \|f\| \cdot \|w\|_{L_2(Q_t)}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_1}{2} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|w(\tau, \cdot)\|^2 + \|w_x\|_{L_2(Q_t)}^2 &\leq (K_\rho + 1) \|w\|_{L_2(Q_t)}^2 + (c_3 + t K_g^{*2}) \|f\|^2 \leq \\ &\leq (K_\rho + 1) t \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|w(\tau, \cdot)\|^2 + c_4(T) \|f\|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Пусть $t \equiv t_0$ таково, что

$$(K_\rho + 1) t < \frac{\Lambda_1}{4}. \quad (2.35)$$

Тогда из (2.34) следует оценка

$$\frac{\Lambda_1}{4} \sup_{0 \leq \tau \leq t_0} \|w(\tau, \cdot)\|^2 + \|w_x\|_{L_2(Q_{t_0})}^2 \leq c_4(T) \|f\|^2.$$

Выбор t_0 в (2.35) не зависит от начального условия (2.26), поэтому за конечное число шагов мы получим оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t, \cdot)\|^2 + \|w_x\|_{L_2(Q)}^2 \leq c_5(T) \|f\|^2. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в (2.33), получаем, что

$$\|w_x(T, \cdot)\|^2 \leq c_6(T, \varepsilon) \|f\|^2. \quad (2.37)$$

Поскольку $\varepsilon \in (0, T)$ было фиксировано, то из (2.37) следует оценка

$$\|z_{tx}(T, \cdot)\|^2 \equiv \|w_x(T, \cdot)\|^2 \leq c^*(T) \|f\|^2. \quad (2.38)$$

Из оценки (2.38), определения оператора B и компактности вложения пространства $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ следует, что оператор B вполне непрерывен как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. При сделанных предположениях (A) – (E) обратная задача (1.1)–(1.4) является фредгольмово разрешимой, т.е. из единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.4) следует существование решения этой задачи.

Доказательство. В силу замечания 2.1 теорему достаточно доказать для задачи (2.5)–(2.8). В силу леммы 2.2 оператор B является вполне непрерывным. Поэтому утверждение теоремы для задачи (2.5)–(2.8) следует из известных результатов функционального анализа [10, с. 472] и леммы 2.1.

§3. Локальная разрешимость обратной задачи.

Дадим два типа условий, достаточных для однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(E). Предположим дополнительно, что

$$\gamma \equiv \frac{1}{\theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{2} > 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{g^2(T, x)}{\rho(T, x)} - \frac{g^2(0, x)}{\rho(0, x)} \geq \mu_0 > 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$T < \frac{(2 - K_{\rho,1})\mu_0}{2\theta^2 K_g^{*2}}. \quad (3.3)$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1.1)–(1.4), и оно единственно.

Доказательство.

I. Покажем, что решение задачи (1.1)–(1.4) единственно. Пусть $\{u(t, x), f(x)\}$ – решение задачи (1.1)–(1.4) при $h(t, x) = \varphi(x) = u_0(x) \equiv 0$. Тогда функция $w(t, x) \equiv u_t(t, x)$ является решением задачи (2.24)–(2.26).

Умножим уравнение (2.24) на $w(t, x)$ и проинтегрируем по Q . Учитывая условие (3.1), после несложных преобразований с использованием неравенства (1.7) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(T, x) w^2(T, x) dx - \int_{\Omega} \rho(0, x) w^2(0, x) dx + \gamma \int_Q w^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{2\theta^2 K_g^{*2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T \|f\|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из уравнения (1.1) при $t = T$ имеем с учетом (1.4) и условия $\varphi(x) \equiv 0$, что

$$f(x) = \frac{\rho(T, x)}{g(T, x)} u_t(T, x) \equiv \frac{\rho(T, x)}{g(T, x)} w(T, x). \quad (3.5)$$

Подставляя соотношения (3.5) и (2.25) в (3.4), приходим к оценке

$$\int_{\Omega} \left[\frac{g^2(T, x)}{\rho(T, x)} - \frac{g^2(0, x)}{\rho(0, x)} \right] f^2(x) dx + \gamma \|w\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{2\theta^2 K_g^{*2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T \|f\|^2.$$

В силу (3.2) имеем отсюда

$$\mu_0 \|f\|^2 + \gamma \|w\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{2\theta^2 K_g^{*2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T \|f\|^2,$$

что в силу (3.3) влечет $f(x) \equiv 0$ в Ω , $w \equiv u_t \equiv 0$ и Q . но тогда, очевидно, и $u(t, x) \equiv 0$ в Q .

Таким образом, единственность решения задачи (1.1)–(1.4) доказана.

II. Существование решения обратной задачи (1.1)–(1.4) есть следствие его единственности и утверждения теоремы 2.1.

Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.

- 1) Условие (3.1) теоремы 3.1 заведомо выполнено, если $\rho_t(t, x) \geq 0$ в Q .
- 2) Условие (3.2) теоремы 3.1 заведомо выполнено, если $g(0, x) \equiv 0$, $x \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (A)–(E). Предположим дополнительно, что

$$\nu \equiv \frac{1}{\Lambda_2 \theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1} > 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1 g_0^2} \left[\left(\frac{K_g^2}{\Lambda_1} - \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\nu} \right) e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\nu} \right] < 1. \quad (3.7)$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.4) имеет решение и оно единственно.

Доказательство.

I. Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (1.1)–(1.4). Докажем прежде всего, что при выполнении условий (3.6), (3.7) оператор B в (2.19) является сжимающим оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Умножим уравнение (2.24) на $w(t, x)$ и проинтегрируем по Ω . После несложных преобразований с применением неравенства (1.7) приходим к оценке

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho w^2 dx + \left(\frac{1}{\Lambda_2 \theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1} \right) \int_{\Omega} \rho w^2 dx \leq \theta^2 K_g^{*2} \|f\|^2. \quad (3.8)$$

Заметим, что в силу (3.6) множитель $1/\Lambda_2 \theta^2 - K_{\rho,1}/\Lambda_1 \equiv \nu > 0$, поэтому, применяя к (3.8) известную лемму Гронуолла (см., например [6, с.112]), и учитывая условие (2.25), приходим к оценке

$$\int_{\Omega} \rho(T, x) w^2(T, x) dx \leq \int_{\Omega} \frac{g^2(0, x)}{\rho(0, x)} f^2(x) dx \cdot e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\nu} (1 - e^{-\nu T}) \|f\|^2.$$

Следовательно,

$$\|Bf\|^2 \equiv \left\| \frac{\rho(T, \cdot)}{g(T, \cdot)} w(T, \cdot) \right\|^2 \leq \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1 g_0^2} \left[\left(\frac{K_g^2}{\Lambda_1} - \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\nu} \right) e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\nu} \right] \|f\|^2. \quad (3.9)$$

Из (3.9) в силу (3.7) вытекает сжимаемость оператора B . Следовательно, уравнение (2.20) однозначно разрешимо.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ является его решением. Подставляя данную $f(x)$ в правую часть уравнения (2.5), найдем функцию $z(t, x)$ как решение прямой задачи (2.5)–(2.7). Тогда в силу леммы 2.1 пара $\{z, f\}$ будет являться обобщенным решением обратной задачи (2.5)–(2.8), что с учетом замечания 2.1 влечет за собой разрешимость обратной задачи (1.1)–(1.4).

II. Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$ обратной задачи (1.1)–(1.4). Тогда в силу леммы 2.1 существует два различных решения $\{z_1, f_1\}$ и $\{z_2, f_2\}$ обратной задачи (2.5)–(2.8). При этом обязательно

$$f_1(x) \neq f_2(x), \quad (3.10)$$

поскольку иначе в силу единственности решения прямой задачи мы бы имели $z_1(t, x) \equiv z_2(t, x)$. Однако условие (3.10) противоречит сжимаемости оператора B , поскольку обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются решениями одного и того же операторного уравнения (2.20).

Теорема 3.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $g(t, x) \equiv \text{const}$, $\rho(t, x) \equiv \text{const}$ в Q , то условия (3.6), (3.7) всегда выполнены, и обратная задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, что соответствует известным ранее результатам.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Условие (3.6) заведомо выполнено, если $\rho_t(t, x) \geq 0$ в Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если $g(t, x) \equiv \text{const}$ в Q , $\rho(t, x) \not\equiv \text{const}$, но $\rho_t(t, x) \geq 0$ в Q , то условие (3.6) выполнено всегда, а условие (3.7) будет выполнено, например, при $T \geq T_0 > 0$ где T_0 явно вычисляется из условия (3.7). Таким образом, задача (1.1)–(1.4) будет иметь единственное решение, если высота цилиндра $Q \equiv Q_T$ достаточно велика.

§4. Некоторые вспомогательные утверждения.

Выше в работе мы неоднократно использовали возможность формального дифференцирования рассматриваемой задачи по переменной t . Для полноты изложения приведем подробное обоснование этого факта.

Итак, рассмотрим в Q две первых краевых задачи

$$\rho(t, x)u_t - \Delta u = h(t, x), \quad (4.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega \quad (4.3)$$

и

$$(\rho(t, x)w)_t - \Delta w = h_t(t, x), \quad (4.4)$$

$$w(0, x) = \frac{\Delta u_0 + h(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega, \quad (4.5)$$

$$w(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.6)$$

Заметим, что задача (4.4)–(4.6) получена формальным дифференцированием задачи (4.1)–(4.3) по t .

Предположим, что для функций $\rho(t, x)$, $h(t, x)$, $u_0(x)$ выполнены условия (A), (C), (D). В этом случае существует единственное энергетическое решение $u(t, x)$ (см. выше определение 2.2) задачи (4.1)–(4.3), которое в силу [7] принадлежит классу $W_2^{1,2}(Q)$.

Ниже нам понадобятся более слабые, нежели энергетические, решения задачи (4.4)–(4.6). Дадим соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $w(t, x) \in L_2(Q)$ называется обобщенным L_2 -решением задачи (4.4)–(4.6), если для любой $\chi(t, x) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$, $\chi(T, x) = 0$, выполнено интегральное тождество

$$-\int_{\Omega} \rho(0, x)w_0(x)\chi(0, x) dx - \int_Q \rho(t, x)w\chi_t(t, x) dxdt - \\ - \int_Q w\Delta\chi(t, x) dxdt = \int_Q h_t(t, x)\chi(t, x) dxdt.$$

где $w_0(x) = (\Delta u_0 + h(0, x))/\rho(0, x)$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. При выполнении условий (A), (C), (D) функция $u_t(t, x)$ (где $u(t, x)$ - решение задачи (4.1)–(4.3)) является энергетическим решением задачи (4.4)–(4.6).

Доказательство. Покажем прежде всего, что обобщенное L_2 -решение задачи (4.4)–(4.6) единственно.

Действительно, пусть существуют два обобщенных L_2 -решения $w_1(t, x)$ и $w_2(t, x)$. Положим $y(t, x) = w_1(t, x) - w_2(t, x)$. Тогда $y(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q y(t, x)(\rho\chi_t + \Delta\chi) dx dt = 0. \quad (4.7)$$

Рассмотрим в Q задачу

$$\begin{aligned} \rho(t, x)\chi_t - \Delta\chi &= y(t, x), \\ \chi(T, x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \chi(t, x) &= 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

В силу [7] данная задача имеет единственное решение $\chi^*(t, x) \in C(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$. Положив в (4.7) $\chi(t, x) = \chi^*(t, x)$, мы, очевидно, получим, что $y(t, x) \equiv 0$ в Q .

Итак, обобщенное L_2 -решение задачи (4.4)–(4.6) единственно. Покажем, что функция $u_t(t, x)$ (где $u(t, x)$ – решение задачи (4.1)–(4.3)) является обобщенным L_2 -решением задачи (4.4)–(4.6).

Действительно, пусть $\chi(t, x) \in L_2(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$, $\chi(T, x) = 0$. Умножим уравнение (4.1) на $-\chi_t(t, x)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . После несложных преобразований придем к соотношению

$$-\int_Q (\rho u_t)\chi_t dx dt - \int_Q u_t \Delta\chi dx dt - \int_\Omega (\Delta u_0 + h(0, x))\chi(0, x) dx = \int_Q h_t \chi dx dt,$$

откуда вытекает, что $u_t(t, x)$ является обобщенным L_2 -решением задачи (4.4)–(4.6).

С другой стороны, в силу предположений (A), (C), (D) задача (4.4)–(4.6) имеет энергетическое решение $w(t, x) \in C(0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega))$, которое одновременно, очевидно, является и обобщенным L_2 -решением этой задачи. В силу доказанной выше единственности такого решения для задачи (4.4)–(4.6) имеем $u_t(t, x) \equiv w(t, x)$, то есть $u_t(t, x)$ является энергетическим решением задачи (4.4)–(4.6).

Теорема 4.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Рунге в обратных задачах для уравнения параболического типа, Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, N 11. С. 1971–1980.
- [2] Соловьев В.В. О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения, Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, N 9. С. 1577–1583.
- [3] Костин А.Б., Прилепко А.И. О разрешимости обратной задачи для уравнения теплопроводности, В кн.: Обратные задачи для математических моделей физических процессов. (Сб. научных трудов). М.: МИФИ, 1991. С. 52–58.
- [4] Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением, Матем. сборник. 1992. Т. 183, N 4. С. 49–68.
- [5] Ткаченко Д.С. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с интегральным переопределением, В кн.: Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докл. Всерос. научн. конф. Екатеринбург: изд-во Уральского ун-та, 2001. С. 120.
- [6] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.: Наука, 1967.
- [7] Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, Матем. сборник. 1986. Т. 173, N 12. С. 477–500.

- [8] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1970.
- [9] Кружков С.Н. *Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными*. Труды сем. им. И.Г.Петровского. 1979. Вып. 5. С. 217–272.
- [10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. М.: Физматгиз, 1959.

E-mail address: `image@consultant.ru`